С.Ю. Жолков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АНТИНОМИИ КАНТА — НЕ АНТИНОМИИ

Аннотация. *Статья посвящена проблемам, поставленным Кантом в «математических антиномиях». Анализ ведется в оригинальной постановке в терминах самого Канта и в контексте его собственной аргументации. Эти проблемы рассматриваются также безотносительно философских построений Канта. Основательность и доказательность, делающие возможным выстраивание анализа в форме строгой теории в понимании современной математики, позволяют категорично утверждать, что Кантовская квалификация безосновательна, а его рассуждения в «математических антиномиях» нельзя считать доказательством. Напротив, и тезисы, и антитезисы неопровержимы. Существо проблем не в неизбежных противоречиях разума или процесса познания трансцендентального мира в ходе кантианского спора разума с самим собой, а в неединственности концептуальных представлений. Что же касается пределов, положенных познающему разуму, то заключаются они, прежде всего, в законах, определяющих архитектонику истинных теорий.*

Ключевые слова: *философия, «математические антиномии», Кант, трансцендентальная диалектика, антитетика, пространство, время, бесконечность, архитектоника истинных теорий, разум.*

Вообще, в высшей степени удивительно, что чем больше мы исследуем свои самые обычные и верные суждения, тем больше мы находим такого рода заблуждения, поскольку мы довольствуемся словами, ничуть не понимая сути дела.
И. Кант[1]

Определяя «верные пути» чистого разума и границы, ему положенные, И. Кант воздвигает «Трансцендентальную диалектику» основанием одному из своих принципиальных утверждений: «безусловное вообще нельзя мыслить без противоречий»[2]. В начале раздела «Антитетика чистого разума»[3] он формулирует 3 диалектических вопроса, которые считает «естественно возникающими перед чистым разумом»: 1) При каких же утверждениях чистый разум неизбежно впадает в антиномию? 2) От каких причин зависит эта антиномия? 3) Может ли разум, несмотря на это противоречие, найти путь к достоверности и каким образом?

Называя антитетику естественным феноменом человеческого разума[4], Кант опирается на антиномии, сформулированные и исследуемые им в Главе второй Книги второй. Таким образом, антиномии становятся «центральным пунктом трансцендентальной диалектики Канта», как справедливо утверждает И.С. Нарский[5] и пишет далее: «Кант рассматривает свои антиномии как неизбежные заблуждения человеческой мысли, для уврачевания которых, по Канту, следует вступить на дорогу, указываемую его, кантовским, дуализмом. Но вступить на нее ее заставляет именно осознание неискоренимости этих заблуждений, так что они, эти заблуждения, оказываются и в роли путеуказателей». Какие же пути они указывают?

При всем разнообразии отношений и оценок Кантовской философии, ее установок и выводов более поздними философами, они не оспаривают (по крайней мере, доказательно) опровержений Кантом, как тезисов, так и антитезисов в его анти-

[1] Кант И. Опыт введения в философию понятия отрицательных величин. Собр. соч.: в 8 т. Т. 2. М.: ЧОРО, 1994. С. 69.

[2] Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 20.

[3] Там же. С. 265.

[4] Там же. С. 257.

[5] Ойзерман Т.И., Нарский И.С. Теория познания Канта. М.: Наука, 1991. С. 156.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

номиях, и квалификаций получающихся противоречивых представлений как антиномий. Только высокого уровня основательность и доказательность, делающие возможным выстраивание анализа в форме строгой теории в понимании современной математики, позволяют категорично утверждать, что Кантовская квалификация безосновательна, а его рассуждения в «математических антиномиях» нельзя считать доказательством.

Обязательные требования к «правильным» содержательным теориям, которые стали понятны после фундаментальных достижений математической логики в XX в., оказываются принципиально важными при исследовании не только собственно математических проблем, но и вопросов философии и различных гуманитарных знаний. Это и есть те самые законы архитектоники истинных теорий, о которых догадался гений Канта, правда, полагая, что они существуют априорно.

1. Проблема

Рассмотрим первые две антиномии, поставив целью подвергнуть строгому анализу в полном объеме источники антиномий и проанализировать использованные Кантом средства или *доказательно* подтвердить, что все источники найдены им правильно и аргументация убедительна. Т.е. вопрос не столько в том, *что* утверждает Кант, но, прежде всего, *почему*.

В соответствии с поставленной задачей анализ антиномий ведется в терминах самого Канта и в контексте его собственной аргументации, разве что, на русском языке, но поскольку рассматриваемые проблемы никак не лингвистические, а в философском аспекте переводчик не исказил автора (это общее мнение), законность анализа русского текста неоспорима. Анализируется оригинальная работа Канта, каких-либо посторонних комментариев мы не касаемся.

Первые две антиномии (математические) формулируются Кантом так:

АНТИНОМИИ ЧИСТОГО РАЗУМА ПЕРВОЕ ПРОТИВОРЕЧИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫХ ИДЕЙ	
Тезис Мир имеет начало во времени и ограничен также в пространстве.	*Антитезис* Мир не имеет начала во времени и границ в пространстве; он бесконечен и во времени, и в пространстве.

АНТИНОМИИ ЧИСТОГО РАЗУМА ВТОРОЕ ПРОТИВОРЕЧИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫХ ИДЕЙ	
Тезис Всякая сложная субстанция в мире состоит из простых частей, и вообще существует только простое или то, что сложено из простого.	*Антитезис* Ни одна сложная вещь в мире не состоит из простых частей, и вообще в мире нет ничего простого.

Полный авторский текст доказательств и комментариев опубликован в книге «Критика чистого разума»[6]. Отметим, что обоснование каждого тезиса обеих антиномий ведется от противного, т.е. опровержением отрицания тезиса, а не доказательством тезиса, что существенно, потому что исследуются инфинитные объекты. Сам Кант считает «своим долгом точно и с уверенностью определить границы чистого разума в его трансцендентальном применении»[7], и для нас важнейшим компонентом последующего анализа будет исследование структуры обоснований Канта, которые он называет доказательством.

Проблемы, обсуждаемые Кантом в математических антиномиях, — проблемы философии, математики и физики. Такими их видит и он сам.

С точки зрения математики, языки, исчисления, теория доказательств и содержательные строгие теории строятся *индуктивно*, от простого к сложному (а не индукционно, от частного к общему)[8]. Поэтому особый интерес для нас представляет вторая антиномия.

С нее и начнем, проведя содержательный анализ, сколь основательны обоснования Канта.

2. Вторая антиномия, аргументация Канта

Предваряя тексты антиномий разделом «Система космологических идей»[9], Кант называет «простым» первоэлемент, не являющийся частью целокупности (впервые о простоте Кант заговаривает в контексте полемики с Лейбницем

[6] Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 268-273; 272-279.

[7] Там же. С. 428.

[8] Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: УРСС, 2004; Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2008.

[9] Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 256-264.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

и «монадистами». Содержательнее и детальнее «простота» обсуждается им в Приложении, в разделе «О паралогизмах чистого разума», где поясняется, что простое есть то, «чего никоим образом нельзя рассматривать как схождение многих действующих вещей». Поскольку затем он утверждает, что «душа или *мыслящее Я*» — пример такой сущности, то возможно говорить и о «простой субстанции» (что и делает Кант в примечании к антитезису а также в рассуждениях, касающихся души в разделе «О паралогизмах чистого разума»). Наблюдаемую «реальность в пространстве» Кант называет материей; совокупность всех феноменов (конечно, наблюдаемых) — миром[10]; категория «мира», «расширенная до безусловного», т.е. не обусловленного феноменами и «эмпирическим созерцанием», становится «умопостигаемой (конечно, только мыслимой)» трансцендентальной (космологической[11] идеей пространства.

Необходимо подчеркнуть, что приводимые пояснения нельзя называть определениями, поскольку они не выстроены как определения теории.

Теперь обратимся к аргументациям и сначала рассмотрим аргументацию в пользу антитезиса, поскольку И.С. Нарским[12] в согласии с Шопенгауэром декларируется ее бóльшая убедительность.

В обоснование первой части антитезиса Кант утверждает, что *любая* часть пространства сама является пространством, поэтому «простая первоначальная часть» (безусловно, в смысле первоэлемента в пространственном смысле, а не «первоначально» в причинном или временном смысле — antecedentia) будет сложной субстанцией, при этом полагая, что пространственная сложность — не форма (акциденция) любой части, в том числе первоэлемента, а ее сущностное свойство. Естественно, при этом неясно, что такое часть пространства.

Доказательства в первых двух антиномиях, называемых Кантом математическими[13], предваряются неразрывно связанными с ними рассуждениями в разделе «Система космологических идей», из которого ясно следует, что части пространства находятся во взаимосвязи лишь посредством общей границы[14], составляя однако «абсолютную целокупность». При этом, если в «доказательстве» Кант утверждает, что любое «деление» пространства дает снова сложную часть, подпространство, то материальная вещь («реальность в пространстве») допускает также иное, законченное деление, «отчего реальность материи или совершенно исчезает, или превращается в нечто такое, что уже не есть материя, а именно в [нечто] простое»[15]. С другой стороны, «простой объект» Кант понимает как «абсолютную простоту», никак не связанную с какими-либо материальными объектами (воистину, нет пределов кантовской мысли — если сложность, то безграничная, в «абсолютной целокупности», если простота, то абсолютная[16], настолько, что проще нет). А «безусловно простой» объект ненаблюдаем, и более того, несоотносим с возможным опытом вообще[17]. Но недвусмысленно разделив пространство и материю, Кант в своих рассуждениях о простых и сложных вещах почему-то все время апеллирует к свойствам пространства.

Наличие далее пояснения к первой части антиномии, почти вдвое превосходящего доказательство, может означать только неудовлетворенность автора общими рассуждениями «доказующего» абзаца (даже при философском предварении), и он решает привлечь на помощь математику и физику (отметим, Кант и далее неоднократно возвращается к обсуждению проблем 2-й антиномии, явно стремясь укрепить доказательную базу). О каких же «очевиднейших математических доказательствах, способных проникнуть в свойства пространства» в пользу рассматриваемого тезиса говорит Кант? «Математическая точка проста, но составляет лишь границу пространства, а не часть его»[18]; хотя, по мнению «монадистов», есть еще и «физические точки, которые, правда, также просты, но имеют то преимущество, что составляют части пространства», но это, по мнению Канта, является нелепостью, имеющей «многочисленные обычные и ясные опровержения». Этих несуществующих в современном понимании опровержений он не приводит, зато в соответствии со своей концепцией высказывает тонкую философскую мысль: материальные вещи — это только наблюдаемые феномены, а не трансцендентальные идеи (не сущности сами по себе), поэтому о физических точках (как и о «предметах всякого созерцания»)

10 Там же. С. 237.

11 Там же. С. 237, 258.

12 См.: там же. С. 160.

13 Там же. С. 326.

14 Там же. С. 260.

15 Там же. С. 261. См. также: с. 323.

16 Там же. С. 275.

17 Там же. С. 275.

18 См. также: там же. С. 141.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

нельзя говорить как об элементарной части пространства. И вообще, найденные «истины», касающиеся предметов опыта, недействительны в мире трансцендентальных идей.

Однако представление Канта о «физических точках» явно ошибочно: материальная точка не является наблюдаемым объектом («предметом эмпирического созерцания») — это такая же абстрактная ἰδέα, как и геометрическая точка.

Но почему же «математическую точку» Кант считает лишь границей, а не частью пространства? Как раз на этот вопрос можно сразу дать ясный ответ. Третье из определений, открывающих первую книгу «Начал» Евклида, гласит: «Границы (концы) линий — точки»[19]. Но поскольку первое определение: «Точка есть то, что не имеет частей» (то есть абсолютно простейшая сущность в понимании Канта) без сомнения было ему известно как бывшему преподавателю геометрии[20], то единственным выходом для «философствующего разума» было считать, что точка не является частью пространства.

Не стоит видеть в этом ухищрение или уловку — это не путь для такого великого ума, как Кант. (К тому же он прямо заявляет в примечании к тезису первой антиномии, что не собирается использовать софистические приемы и строить «адвокатское доказательство»[21]. Таковы были тогда и представления профессиональных геометров — понадобилось сто лет работы математиков, чтобы пришло понимание того, что пространство или пространственная фигура состоит из точек — даже в 70-е годы XIX в. Феликс Клейн писал о пространстве как «месте точек», но точку не рассматривал как фигуру. Что ж удивительного в представлении Канта, будто «пространство составляет условие возможности тел», а вещь и любая ее часть «занимают пространство», но «априорные определения пространства не касаются также всего того, что возможно лишь благодаря наполнению им пространства»[22]. Даже в школьном курсе геометрии конца XX в. мы видим понятие «геометрического места точек», по-русски эти слова означают: фигура, часть плоскости — это геометрическое место *для* (расположения) точек.

Отвлекшись от пространственных свойств, обратимся к кантовским обоснованиям тезиса. Как справедливо указывает Кант, нечто, называемое им простой сущностью (частью), должно существовать отдельно от объединения простых сущностей в сложные. Но из этого он безосновательно делает вывод, будто «все вещи в мире» должны пребывать *исключительно* отдельно от указанного объединения, т.е. как простые сущности. Причем в ходе рассуждений он признает только крайние альтернативы: либо субстанции существуют только в связи с объединением, либо исключительно вне его (опять крайности! — «берегитесь крайностей, держитесь срединного пути», предостерегает Восток). Вдобавок и пространство в представлении Канта устроено весьма странно: части его возможны только в целом, а не целое образуется посредством частей... Так как пространство не сложено из субстанций (и не состоит даже из реальных акциденций), то по устранении в нем всякого сложения ничего не должно остаться, даже и точки, так как точка возможна только как граница пространства (стало быть, граница сложного).

Разумеется, мы опять сталкиваемся с уже отмеченным представлением о точке только как границе пространства.

Итак, по Канту, все вещи в мире и сложны, и просты в той же степени, как нет ни простых, ни сложных вещей.

При анализе критических рассуждений Канта обращает на себя внимание обилие синкретичных в равной степени неясных понятий — здесь и сущности, и субстанции, и величины[23], и изменения, и границы, и соединение, и случайные отношения, и атомы, и сложение, и агрегация, и измерение пространства[24]. И, разумеется, кантовские конструкции не выстроены как теории: концепты (изначальные понятия) — основоположения — доказательства. В какой же степени вторую антиномию можно считать ἀντινομία — противоречием в *законах*, а сопутствующие рассуждения — доказательством?

[19] Евклид. Начала. Кн. I–VI. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

[20] Свое знание геометрических приемов он демонстрирует например: Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 425.

[21] Там же. С. 270.

[22] Там же. С. 277. См. также: с. 34, 428.

[23] На с. 424 «Критики чистого разума» Кант относит к величинам «целокупность», «бесконечность», на с. 141 он объявляет, что «все явления суть величины»; число на с. 425 называет «величиной вообще».

[24] Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 260.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

3. Об архитектонике геометрии

Евклидова геометрия пространства строится так, как и подобает научной теории: минимальный круг изначальных понятий (объекты и отношения между ними), символика — логика предикатов в форме естественной речи — производные (вытекающие из начальных) отношения — аксиомы, включающие элементарные операции и новые простые объекты — новые, все более сложные объекты, и их свойства в виде выводимых логических формул (теорем). Проследим детальнее эту динамику на примере геометрии плоскости (планиметрии)[25].

Изначальные понятия (§7). Концепты: точки (*A*, *B*,...), отрезки (*a*, *b*...), фигуры (*F*). Отношения: точка принадлежит отрезку ($A \in a$), точка принадлежит отрезку (либо лежит внутри него, либо служит концом); равенство отрезков ($a = b$). Отношения и аксиомы, касающиеся фигур, удобно излагать отдельно, поскольку сначала принято строить геометрию отрезков и производных (прямолинейных) фигур. Производные отношения: 1) $a \subset b$; 2) $a \cup b = c$; 3) откладывание одного отрезка (b) от конца A другого отрезка (a) вдоль него (a); 4) пересечение отрезков по единственной точке.

Аксиоматика основная (§8): аксиомы о свойствах отрезков, аксиомы деления на две полуплоскости; определение угла и аксиома откладывания угла; аксиома параллельных отрезков.

Аксиомы фигуры и операции (§11). Отношения: точка принадлежит фигуре: $A \in B = A\}$. Операции: *F*. Аксиомы: равенство фигур; любая точка — фигура; предикативное определение фигуры: $F = \{A: \varphi(A)\}$ — фигура, если $\varphi(A)$ — предикат с предметной областью — точки, например, точка $A = \{B:$ объединение, пересечение. Резюме:

- точка — элементарная (простейшая) фигура, свойства точки определяются ее отношением к другим точкам или фигурам (геометрические фигуры можно считать «частями плоскости» в понимании Канта);
- отрезок, полуплоскость, угол и определяемые далее луч и прямая (§16) — самые простые прямолинейные фигуры;
- более сложные криволинейные геометрические фигуры определяются предикативно: круг[26], окружность, эллипс[27].

А далее планиметрия развивается так, как и положено научной теории: от простого к сложному, от простых «истин» к сложным. Изучаются свойства отрезков, прямых и лучей. Определяется треугольник и изучаются свойства треугольников и углов. Изучаются свойства параллельных отрезков и прямых. Изучаются свойства трапеции и прочих многоугольников, свойства элементов круга, теория измерений простых геометрических фигур и т.д. Затем анализируется сама аксиоматика и ее различные варианты. И никаких противоречий, ни в законах, ни в деталях не обнаруживается. То же самое можно сказать и о геометрии трехмерного пространства. Мы рассматриваем геометрию на плоскости только для простоты демонстраций.

Резюмируя, необходимо обратить внимание на принципиальный момент. В своде аксиом и постулатов, сформулированных Евклидом, недоставало многих необходимых понятий и аксиом, частично потому что они казались самоочевидными, частично потому что не были осознаны[28]. Для того, чтобы евклидову геометрию можно было изложить как правильную теорию, они *неизбежно и необходимо* должны были появиться в любой из возможных форм аксиоматики. То есть недостающие аксиомы, если угодно, существовали до исследований геометров, что в полной мере подтверждает всю гениальность замысла Канта: как интуитивного откровения — уверенности в существовании истин и правил логического вывода, находящихся за пределами *известного* опыта, так и попытки «доказать» положения выдвинутой им концепции.

При этом следует отметить, что все плоские фигуры элементарной геометрии: полуплоскости, углы, треугольники или иные многоугольники, круги или секторы (все без границ, столь пренебрегаемых Кантом) гомеоморфны плоскости (соответствующие трехмерные фигуры — пространству) и поэтому столь же «сложны» как и само пространство. Заметим вдобавок, точка действительно делит отрезок на два отрезка, а прямая на две полуплоскости, столь же сложные, как первоначальные отрезок и плоскость соответственно. Как раз об этом пишет автор в анализе антитезиса. Естественно предположить, именно геометрический опыт кантовского разума (по его терминоло-

[25] Александров А.Д. Основания геометрии. М.: Наука, 1987.

[26] Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 43.

[27] Там же. С. 42-43.

[28] Александров А.Д. Основания геометрии. М.: Наука, 1987. С. 256.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

гии — не опыт, а созерцание[29], соответствовавший тогдашнему состоянию геометрии, явился основой трансцендентальных «философских понятий» о пространстве и последующего «философского познания»[30]. Математикам понадобилось более ста лет исследований, прежде чем появился труд («Основания геометрии» Д. Гильберта, 1899 г. — рус. пер. 1948), строгим образом представивший геометрию как теорию (правда, в дальнейшем Гильберту пришлось уточнить свою аксиоматику). Впоследствии появились и другие варианты изложения основ геометрии[31], но не в процессе долгого созерцания готовых «мыслительных сущностей», а в результате созидательного анализа и сравнения в поисках оптимальной формы изложения.

А проблемы геометрии в целом оказались настолько сложными, что потребовали многовековых исследований. Подводя итог, известный геометр м-м Жаклин Лелон-Ферран пишет: «с точностью до гомотетии существуют лишь две «метрические плоскости»: евклидова и гиперболическая — это итог 25 веков исследований, от Евклида до XIX в.»[32].

Но кроме простых фигур элементарной геометрии, и трехмерное пространство, и плоскость, и прямая содержат подпространства (которые естественно считать частями пространства), чрезвычайно разнообразные по своим свойствам: и нульмерный во всех смыслах топологии и теории меры канторов совершенный дисконтинуум, и дисконтинуум Антуана[33], и кривые Серпинского, и аналитические множества, и причудливые вполне несовершенные пространства[34], и причудливые вполне несовершенные пространства, и проч., и проч. Так что, в пространстве и в мире есть и простые, и сложные части, но находятся они *не в противоречии, а в многообразии*.

При этом из возможности рассматривать точки отдельно от операции объединения *не следует*, что всякая вещь в мире (или часть пространства) проста; из того, что вещь занимает часть пространства *не следует*, что она обязана быть сложной; предмет опыта не обязан не быть «безусловно простым» из-за своих связей с другими объектами и проч., что уже обсуждалось. Поэтому вывод «следовательно» применяется Кантом безосновательно, так же, как сопутствующие им (выводам) рассуждения не являются доказательствами и мало что проясняют — да, они раскрывают и величие замысла автора, и глубину прозрений, но доказательствами не являются!

На самом деле, наличие геометрии и топологии как теорий пространства, свободных от противоречий, в рамках которых опровергаются утверждения Канта о свойствах пространства, достаточно для того, чтобы утверждать, что «вторая антиномия» антиномией не является. При этом вовсе не обязательно во всех деталях разбирать сопутствующие общие рассуждения: общие рассуждения, если вдуматься, очень уязвимы — одной непротиворечивой модели, в которой тезис или антитезис истинны (выводимы), иными словами, одного примера созерцающего разума достаточно, чтобы они рухнули.

Но нас в не меньшей степени, чем выводы, интересует структура рассуждений Канта и истоки недостоверности выводов. А причиной недостоверности его выводов была недостаточность средств рационалистического анализа структуры и свойств пространства. Геометрия и математика в целом, включая логику, при жизни Канта ни в коей мере не достигли уровня, достаточного для разрешения сложнейших проблем, поставленных Кантом во второй антиномии.

4. Первая антиномия

В еще большей степени это касается первой кантовской антиномии — представления о бесконечности были даже более неудовлетворительными, чем представления о пространстве; математических средств анализа бесконечного и «безграничного» во времена Канта было не больше, чем времена Паскаля, который в контексте метафизических рассуждений о Боге, справедливости и бесконечности фрагмента 233 своего труда «Мысли» (Pensées) откровенно признается: «Мы знаем, что бесконечность существует, но не ведаем, какова ее природа». Правда, это не мешает замечательному философу и ученому высказывать суждение о ее свойствах.

На самом деле, антиномия даже не сформулирована корректно, не определен и предмет

[29] Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 423-427.

[30] Там же. С. 423.

[31] Александров А.Д. Основания геометрии. М.: Наука, 1987. § 61, 46. Гл. 6.

[32] Лелон-Ферран Ж. Основания геометрии. М.: МИР, 1989. С. 264.

[33] Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. С. 138-143, 216-221.

[34] Куратовский К. Топология: в 2 т. М.: Мир, 1966, 1969. Т. 1. С. 280-281 (§ 39, § 40).

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

обсуждения, идут к тому же подмены терминов, в равной степени непонятных: безграничность — бесконечность — «бесконечный ряд состояний» — «бесконечное целое и размер такого количества»... и соответственно, начало во времени — бесконечность как отсутствие начала — невозможность соотнесения всего мира и «ничто» — возникновение вещи из пустоты...

Бесконечность мыслится Кантом[35] только как количество, соотнесенное с бесконечной суммой единиц, т.е. с количественным измерением целокупного натурального ряда. А поскольку среди натуральных чисел нет максимального и в те времена бесконечные кардиналы еще не были известны, великий философ ошибочно полагает, что «невозможна никакая бесконечная данная величина, стало быть, невозможен (если иметь в виду прошедший ряд и протяжение) и бесконечный мир»[36], и сразу безосновательно переходит к безграничности, заключая: «значит, мир ограничен во времени и пространстве». При этом необходимо отметить, что бесконечность пространства — другое понимание «бесконечности» автором «антиномий чистого разума», означает для него неограниченность вполне в современном смысле — как бесконечность диаметра множества: «мир пространственно не ограничен, т.е. он бесконечен, если иметь в виду протяжение»[37], см. также последний абзац примечания к антитезису[38]. А ограниченность мыслится им только в связи со «сложностью» и «целокупностью» частей в синтезе целого, но не с «бесконечным»[39].

В аргументации тезиса 1-й антиномии также выдвигается (кажущееся автору бесспорным) положение, будто бы завершение синтеза бесконечного процесса *обязано* длиться бесконечное время — эту идею он проводит твердо и последовательно. Это правильно сформулированный тезис, посему он требует обсуждения.

Это утверждение как утверждение математики на языке математики ошибочно. Все известные к тому времени суммы (бесконечных) числовых рядов (а сумму бесконечной геометрической прогрессии он несомненно знал) и пределы, разложения в степенные ряды элементарных функций (приближение рядами Ньютон считал наиболее сильным методом вычисления и изучения функций), формула Ньютона-Лейбница и т.п. — недвусмысленные примеры завершения инфинитных процедур числом или финитной формулой. Конечно, получение этих замечательных результатов заняло у авторов определенное время, но совсем не бесконечное. Собственно говоря, решение едва ли не каждой значительной задачи методами математического анализа — это определение числовых характеристик некоторого завершенного бесконечного процесса, т.е. актуальной бесконечности, почти запрещенной в классической философии. По тем же причинам это утверждение по отношению к инфинитным конструкциям физики как утверждение физики на языке физики или математической физики также ошибочно. Так что, этой (общепринятой) ошибки Кант мог избежать, внимательно проанализировав труды основоположников математического анализа.

Это утверждение как утверждение философии также неверно — в качестве опровергающих примеров обратимся к классическим апориям Зенона «Дихотомия» и «Ахиллес и черепаха». Ошибка вывода каждой апории заключалась в утверждении, что бесконечное число действий, рассматриваемых в апории (достижение последовательных середин), потребует бесконечного времени. Если в первой апории время до достижения телом середины отрезка обозначить через t, то в противоположность утверждению Зенона, суммарное время равно,

$$t+\frac{t}{2}+\ldots+\frac{t}{2^n}+\ldots=t\frac{1}{1-1/2}=2t$$

т.е. в «Дихотомии» тело достигнет конца отрезка за конечное время $2t$. То же и для второй апории[40]. Возможно, поверхностный анализ этих апорий и был источником обсуждаемой ошибки.

Следует обратить внимание также на конструктивный аспект рассуждений Зенона и Канта. Процедуры достижения последовательных середин и соревнование Ахилла с черепахой нельзя назвать даже умозрительными («формально созерцательными»): перемещение тела в первой апории и Ахилла или черепахи — во второй шагом в миллиметры и т.д. невозможно «созерцать»

[35] Многократно по тексту: Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 268-272.

[36] Там же. С. 270.

[37] Там же. С. 269-271.

[38] Там же. С. 273.

[39] См.: Там же. С. 268 и, в особенности, во 2-й антиномии.

[40] См.: Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев: учебник. М.: ИНФРА-М, 2004. С. 460.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

даже чистым разумом — то, что оно не является «эмпирически созерцательным»[41], очевидно. Этот гипотетический процесс может быть назван только умопостигаемым (но не умозрительным, что существенно разные вещи) — это чистая гипотеза разума.

Аргументируя антитезис, Кант обращается к «другой бесконечности» — пространственной, а не количественной, применяет *другие* доводы и, естественно, получает другие выводы. Основы его доводов — отрицание существования пустого пространства и пустого времени: «эти две бессмыслицы — наличие пустого пространства вне мира и пустого времени до мира»[42] и невозможность сосуществования мира с пустым пространством или пустым временем. При этом автор «Критики чистого разума» тонко выводит и противоречие: «Чувственно воспринимаемый мир, если он ограничен, неизбежно находится в бесконечной пустоте. Если мы a priori устраняем ее и вместе с ней пространство вообще как условие возможности явлений, то вместе с этим упраздняется весь чувственно воспринимаемый мир».

И, разумеется, мы снова (как и во 2-й антиномии) сталкиваемся с представлениями Канта о пространстве как о «форме внешнего созерцания, а не действительном предмете, который можно было бы внешне созерцать, потому что само по себе оно не есть нечто действительное»[43], как о форме для возможных предметов.

Необходимо подчеркнуть, согласно мнению Канта, пустое множество не принадлежит к числу возможных восприятий[44], и «если мир имеет границы (во времени и пространстве), то бесконечная пустота должна определять величину действительных вещей...», и нам остается едино только «вместо чувственно воспринимаемого мира представлять себе неизвестно какой умопостигаемый мир»[45]. Но это чисто западная точка зрения на пустоту — восточные философские школы воспринимали пустоту (шунью) совершенно иначе. Так что, в данном случае можно говорить лишь об *умопостигаемом Кантом* мире.

Оставаясь в границах общих рассуждений, следует указать на множество вопросов, возникающих при анализе текста антиномии. О какой безграничности или бесконечности идет речь? Пространства натуральных или рациональных чисел, интервал (0,1), прямая, плоскость, открытый шар, трехмерное пространство, бесконечные кардиналы или ординалы — все они бесконечны, но по-разному! И о какой безначальности идет речь? Оба временных интервала — и (0,1), и (— ∞, + ∞) не имеют начала. И сколь корректно понятие «до начала мира»? — Являясь правильно построенным словосочетанием естественного языка, оно может быть внутренне противоречивым подобно множеству всех множеств или известному брадобрею из парадокса Рассела. А может быть, время имеет более сложную, петлеобразную структуру? И почему до начала умопостигаемого мира был пустой мир, а не другой мир?

5. Пространство и время

Теперь обратимся к проблемам, рассмотренным Кантом, безотносительно его философских построений. Пространственно-временные свойства Вселенной наблюдаемы и измеряемы, поэтому структура пространства и времени — физическая проблема даже в большей степени, чем философская. К счастью, уровень современных физических знаний таков, что мы можем не только задавать вопросы о структуре пространственно-временного континуума, но и давать ответы, не оставаясь в границах общих рассуждений.

Наиболее основательной для утверждения о неизбежной антитетике безусловного и априорного представляется проблема, связанная с началом мира. Прежде всего, если мир бесконечен во времени, и не имеет начала, то как до настоящего времени могла *пройти* бесконечность, что означает завершение бесконечного процесса *равномерно* текущего времени. А, с другой стороны, если мир имел начало во времени, то что означает «время до начала мира», и что тогда происходило?

Источником этих вопросов является наследие мудрых эллинов, от которых мы получили представление о времени, как о линейном континууме, подобном числовой прямой. С этим связаны также наши представления об обязательном отношении любых двух моментов времени, один из которых предшествует другому, т.е. один из них — «до», а другой — обязательно «после». Однако теперь мы уже знаем, что не все события пространственно-временного континуума связаны отношением «до–после».

[41] В терминах Канта см.: Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994. С. 271.

[42] Там же. С. 273.

[43] Там же. С. 271.

[44] Там же. С. 271.

[45] Там же. С. 273.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

В современной физике пространственные координаты и время связаны воедино геометрией Минковского. Точки (элементы) этого пространства делятся на три класса: пространственноподобные, времениподобные, световые. На времениподобных интервалах наблюдения (элементы) будут последовательны в обычном смысле (одно будет предшествовать другому), а релятивистский временной интервал не будет зависеть от системы отсчета. Для пространственноподобных интервалов и величина, и знак разности временных координат могут меняться в зависимости от системы отсчета (четырехмерных координат). Про такие наблюдения (события) нельзя сказать, какое предшествует другому, они называются квазиодновременными. Физика пространственно-временного континуума изложена в монографии *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* «Теория поля», геометрия — *Новиков С.П.*, *Фоменко А.Т.* «Элементы дифференциальной геометрии и топологии».

Другая форма квазиодновременности или неупорядоченности очень малых временных интервалов — неинвариантность относительно систем отсчета одновременности событий: два события, одновременные в одной системе отсчета могут стать неодновременными в другой.

Еще одна неведомая Канту особенность времени — его относительность: в разных системах отсчета время течет по-разному. Это свойство обычно иллюстрируют общеизвестным «парадоксом близнецов». Абсолютного времени, в котором жил разум Канта, и его априорных пространства и времени, какими он их представлял, в реальности не существует — гипотеза их существования приводит к противоречию с физическими фактами.

Из нестационарной космологической модели А.А. Фридмана следует, что у наблюдаемой Вселенной (при условии постоянной скорости разбегания) была начальная точка — точка рождения, когда ее плотность была «бесконечной», а размеры ничтожными. Это был другой мир, в котором квантовые силы и эффекты доминировали над гравитационными. Согласно модели Фридмана и закона Хаббла, это происходило примерно 13,7–14 млрд. лет назад. Даже сейчас недостаточно физических данных, чтобы понять, что тогда происходило. Есть разные гипотезы. По гипотезе М.А. Маркова[46] начальная точка наблюдаемой нами Вселенной была заключительной в «прежнем цикле» ее жизни, которая представляет собой ряд циклов расширения и сжатия. Неопровергнутая гипотеза, полностью противоречащая представлениям Канта (зато согласующаяся с представлениями восточной философии), утверждает, что Вселенная самопроизвольно родилась из вакуума подобно тому, как рождаются элементарные частицы.

Убеждение кантовских времен, будто бесконечно протяженная в пространстве евклидова Вселенная — единственно возможное представление, согласующееся с законами физики, в настоящее время не считается верным; возможно, что Вселенная конечна, хотя и очень велика. Согласно еще одной гипотезе время дискретно с атомарным интервалом порядка 10^{-43}с. А согласно одной из гипотез А. Эддингтона, время может не быть одномерным.

Все это пока непроверяемо, но и прямых опровержений не имеет.

Заключение. Выводы

Все вышесказанное доказывает, что аргументы Канта логически неверны (и формально, и предметно), и тезисы, и антитезисы антиномичными не являются. Верное решение рассмотренных Кантом в математических антиномиях проблем — «антикантовское»: все наоборот, и тезисы, и антитезисы неопровержимы. Так что, проблема не в том, как разрешить эти «антиномии», а в том, что они антиномиями не являются. Зато и тезис, и антитезис сформулированы неточно, а аргументация в их поддержку не может считаться доказательством — вот это имеет место быть, так что, антитетика математических «антиномий» не в законах и не в «пределах, положенных разуму», а в представлениях и рассуждениях Канта.

Но много интереснее другое — в чем кроются заблуждения великого философа и каковы их истоки. Догадка Канта о возможности противоположных представлений о пространстве, времени и структуре вещей замечательна. Проблема имеет два решения. Первое, предложенное Кантом, — неизбежность противоречий разума, познающего трансцендентальный мир, и соответствующей трансцендентальной диалектики. Другое решение требовало немыслимого в те времена отказа от догмы о существовании единственной «абсолютной истины». (Но заметим, для индийских философов множественность истины представлялась самоочевидным фактом и никакой объективной и абсолют-

[46] Марков М.А. О природе материи. М.: Наука, 1976.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

ной истины они не признавали[47]). Однако существование неразрешимых проблем и альтернативных теорий даже в математике[48], при которых разум не вступает ни в какие противоречия, свидетельствует о том, что существо проблем не в неизбежных противоречиях разума или процесса познания, а в неединственности концептуальных представлений. Простейший пример — альтернативные геометрии: совместимость как аксиомы о параллельных, так и ее отрицания с аксиоматикой абсолютной геометрии — твердо установленный факт. И никакой внутренней противоречивости разума.

Следует указать на открытые математикой факты, еще более неочевидные. Я имею в виду возможное наличие внутри теории тезисов или проблем (правильно сформулированных суждений или гипотез), которым нельзя дать истинностную оценку дозволенными (логическими) средствами. В точной формулировке: могут существовать замкнутые логические формулы теории, которые невыводимы из аксиом теории так же, как невыводимы и отрицания этих формул. Пример такой теории — теория арифметики $\boldsymbol{Ar}$, описывающая, как то ни удивительно, самые простые из возможных объектов — натуральные числа. Самым известным примером такой (невыводимой) формулы является гёделева формула *Con*, которая утверждает, что формальная арифметика $\boldsymbol{Ar}$ непротиворечива[49].

Причины этих общезначимых открытий — колоссальный прогресс в понимании законов построения строгих доказательных теорий. Это те самые законы архитектоники истинных теорий, находившиеся за пределами известных Канту опыта и созерцания, о которых догадался его гений, вопрошая: «как возможны синтетические суждения априори?».

И напротив, ненадлежащая степень совершенства выразительных средств (представлений о бесконечности, пространстве и времени) и средств анализа, но главное, невыстроенность кантовского обоснования в форме строгой теории стали причиной его ошибок и заблуждений.

Увы, начав с искренней попытки подтвердить выводы Канта, мы пришли к противоположным выводам — но тут уж ничего не поделаешь. И все же самое важное — в другом. Математические антиномии Канта можно считать антитетикой: истинная антитетика антиномий Канта — противоречие великого ума и ничтожных средств (анализа). А одними умозрительными, общефилософскими рассуждениями сложнейшие проблемы, к которым обращается Кант, решить было невозможно даже при всей его гениальности. Оценивая механику Ньютона и классическую физику в целом, Эйнштейн писал, что выводы, к которым пришел Ньютон «при современном ему состоянии науки были единственно возможными». Думаю, то же следует сказать и о Канте.

Итак, из кантианского спора разума с самим собой как плодотворного процесса анализа и выбора не обязательно следует утверждение о противоречивости познания трансцендентального мира. Но для конца XVIII в. это утверждение можно считать естественным, удивительно в конце XX в. читать утверждение, что разум внутренне противоречив по своей природе, а самому процессу познания необходимо присущи противоречия[50]. Конечно, такой разум способен породить только ложный «процесс познания».

А если говорить о пределах, положенных познающему разуму, то заключаются они, прежде всего, в законах, определяющих архитектонику истинных теорий. Законы архитектоники истинных теорий должны соблюдаться безотносительно предметной области применения, в противном случае это раз за разом приводит к ошибкам или неопределенности. Результаты, полученные в применении к проблемам реальной прагматики, исторического военно-политического анализа и социально политической философии[51], свидетельствуют, что именно характерная для математики строгость и доказательность обеспечивает триаду «достаточные основания — достоверные рассуждения — обоснованные гипотезы», которая является необходимым средством «различения истины и видимости» (И. Кант[52]) и превращает знания в научные теории.

[47] См. напр.: Канаева Н.А. Проблема выводного знания в Индии. М.: Вост. лит., 2002. С. 39.

[48] Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев. М.: ИНФРА-М, 2004. (С. 177, 183); Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: УРСС, 2004. Ч. 2. (Гл. I. §§ 5-6, Гл. III. § 1).

[49] Подробно: Там же. Ч. 2. Гл. III.

[50] Ойзерман Т.И., Нарский И.С. Теория познания Канта. М.: Наука, 1991. С. 157, 165.

[51] Жолков С.Ю. Концептуальный анализ проблем дипломатии и математический опыт. Дипл. Акад. МИД СССР (Сб. труд. каф. инф. и упр.). Вып. 2. М., 2002. С. 165-188; Жолков С.Ю. О законах социума и истории // Alma-mater — Вестник высшей школы. 2010. № 2, № 3; Жолков С.Ю. Социально-политическая философия М.М. Сперанского // Ценности и смыслы. 2011. № 1 (10). С. 76-92.

[52] Кант И. Трактаты. Пролегомены ко всякой будущей метафизике… СПб: Наука, 1996. С. 252.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064

Список литературы:

1. Александров А.Д. Основания геометрии. М.: Наука, 1987.
2. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
3. Верещагин Н.К., Шень А. Вычислимые функции. М.: МЦНМО, 2008.
4. Верещагин Н.К., Шень А. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2008.
5. Евклид. Начала. Кн. I–VI. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Жолков С.Ю. Концептуальный анализ проблем дипломатии и математический опыт. Дипл. Акад. МИД СССР (Сб. труд. каф. инф. и упр.). Вып. 2. М., 2002. С. 165-188.
7. Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев: учебник. М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Жолков С.Ю. О законах социума и истории // Alma-mater — Вестник высшей школы. 2010. № 2, № 3.
9. Жолков С.Ю. Социально-политическая философия М.М. Сперанского // Ценности и смыслы. 2011. № 1 (10). С. 76-92.
10. Канаева Н.А. Проблема выводного знания в Индии. М.: Вост. лит., 2002.
11. Кант И. Критика чистого разума. М.: Мысль, 1994.
12. Кант И. Опыт введения в философию понятия отрицательных величин. Собр. соч.: в 8 т. Т. 2. М.: ЧОРО, 1994.
13. Кант И. Трактаты. Пролегомены ко всякой будущей метафизике... СПб: Наука, 1996.
14. Клини С. Математическая логика. М.: МИР, 1973.
15. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М.: УРСС, 2004.
16. Куратовский К. Топология: в 2 т. М.: Мир, 1966, 1969.
17. Лелон-Ферран Ж. Основания геометрии. М.: МИР, 1989.
18. Марков М.А. О природе материи. М.: Наука, 1976.
19. Ойзерман Т.И., Нарский И.С. Теория познания Канта. М.: Наука, 1991.
20. Справочная книга по математической логике. Т. 2. М.: Наука, 1982.

References (transliteration):

1. Aleksandrov A.D. Osnovaniya geometrii. M.: Nauka, 1987.
2. Aleksandrov P.S. Vvedenie v obschuyu teoriyu mnozhestv i obschuyu topologiyu. M.: Nauka, 1977.
3. Vereschagin N.K., Shen‘ A. Vychislimye funkcii. M.: MCNMO, 2008.
4. Vereschagin N.K., Shen’ A. Yazyki i ischisleniya. M.: MCNMO, 2008.
5. Evklid. Nachala. Kn. I–VI. M.; L.: Gostehizdat, 1948.
6. Zholkov C.Yu. Konceptual‘nyy analiz problem diplomatii i matematicheskiy opyt. Dipl. Akad. MID SSSR (Sb. trud. kaf. inf. i upr.). Vyp. 2. M., 2002. S. 165-188.
7. Zholkov S.Yu. Matematika i informatika dlya gumanitariev: uchebnik. M.: INFRA-M, 2004.
8. Zholkov C.Yu. O zakonah sociuma i istorii // Alma-mater — Vestnik vysshey shkoly. 2010. № 2, № 3.
9. Zholkov C.Yu. Social’no-politicheskaya filosofiya M.M. Speranskogo // Cennosti i smysly. 2011. № 1 (10). C. 76-92.
10. Kanaeva N.A. Problema vyvodnogo znaniya v Indii. M.: Vost. lit., 2002.
11. Kant I. Kritika chistogo razuma. M.: Mysl’, 1994.
12. Kant I. Opyt vvedeniya v filosofiyu ponyatiya otricatel‘nyh velichin. Sobr. soch. v 8 tt. T. 2. M.: ChORO, 1994.
13. Kant I. Traktaty. Prolegomeny ko vsyakoy buduschey metafizike... SPb: Nauka, 1996.
14. Klini S. Matematicheskaya logika. M.: MIR, 1973.
15. Kolmogorov A.N., Dragalin A.G. Matematicheskaya logika. M.: URSS, 2004.
16. Kuratovskiy K. Topologiya. V 2 tt. M.: Mir, 1966, 1969.
17. Lelon-Ferran Zh. Osnovaniya geometrii. M.: MIR, 1989.
18. Markov M.A. O prirode materii. M.: Nauka, 1976.
19. Oyzerman T.I., Narskiy I.S. Teoriya poznaniya Kanta. M.: Nauka, 1991.
20. Spravochnaya kniga po matematicheskoy logike. T. 2. M.: Nauka, 1982.

DOI: 10.7256/1999-2793.2013.10.7064